CONICHE, QUADRICHE

1. Discutere, al variare di $h \in \mathbf{R}$, il tipo delle coniche della famiglia F definita dall'equazione:

$$2x^2 + 2xy + hy^2 - 2x + 2hy = 0.$$

Esistono in F delle iperboli equilatere?

2. Determinare i valori reali di $h \in \mathbf{R}$ in corrispondenza dei quali la conica di equazione:

$$2x^2 - 2hxy + y^2 + 2x = 0$$

sia un'ellisse con rapporto dei semiassi uguale a 2.

3. Trovare le parabole della famiglia F definita dall'equazione:

$$h(1 - x^2) + y^2 - hxy + y = 0.$$

4. Studiare le seguenti coniche, disegnarle, trovarne una forma canonica e scrivere le formule dei cambiamenti di riferimento necessari per ottenere tali forme canoniche:
   1) $x^2 - 5y^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 4 = 0$;
   2) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;
   3) $7x^2 + 8xy + y^2 + 9x - 1 = 0$;
   4) $3y^2 - 4xy - 4x = 0$;
   5) $3x^2 - 4y^2 = y$.

5. Riconoscere che le seguenti coniche sono degeneri e trovarne le componenti:
   1) $xy + y^2 - 2x - y - 2 = 0$;
   2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 5x - 10y = 0$;
   3) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$;
   4) $x^2 + y^2 + 2xy + 1 = 0$.

6. Dati

$$Q:\ x^2 + 2\,(5+\sqrt{22})\,xz + y^2 + 4yz + 5(5+\sqrt{22})\,z^2 + 2x = 0$$

$$S:\ y = 0.$$

   1) Dimostrare che Q è a punti ellittici.
   2) Trovare il tipo di $\Gamma = Q \cap S$.
   3) Dedurre da 1) e 2) il tipo della quadrica Q.

7. Siano

$$Q:\ 3x^2 - 2x - y^2 - 3y - z = 0$$

$$S: h(x + y) - z = 0.$$

1) Riconoscere, al variare di $h \in \mathbf{R}$, la conica $L = Q \cap S$.

2) Trovare su Q, se esistono, un'ellisse, una parabola, una coppia di rette reali incidenti.

8. Siano date le quadriche $xz + yz + xy = y$, $5xz - yz + xy = 2x$.

1) Provare che passano per l'asse z;

2) Trovare, se esistono, i punti dell'asse z in cui le due quadriche hanno lo stesso piano tangente.

QUIZ

1. Sia

$$\Gamma : (t+3)x^2 + 4xy + ty^2 - 2y = 0:$$

a) Γ è una conica a centro se e solo se $t = 1$;

b) Γ è non degenere per $t = -3$;

c) Γ è una iperbole equilatera per $t = -\frac{3}{2}$;

d) Γ è degenere per $t = -4$.

2. La parabola di vertice (1, 2), passante per (-1, 0) e con asse parallelo all'asse y è:

a) $2y + x^2 + 2x + 3 = 0$;

b) $y + x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$;

c) $x^2 + y - 1 = 0$;

d) $2y + x^2 - 2x - 3 = 0$.

3. La conica

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 4 = 0:$$

a) è a punti immaginari;

b) è degenere;

c) non è un'ellisse;

d) è un'iperbole.

4. Sia data la famiglia di coniche

$$\mathcal{F} : x^2 + 4xy - 4y^2 + 2x + k = 0 \quad (k \in \mathbf{R}):$$

a) in $\mathcal{F}$ non ci sono coniche degeneri;

b) tutte le iperboli di F hanno lo stesso centro;

c) in F ci sono solo coniche degeneri ed ellissi;

d) la conica di F che passa per (0,0) è degenere.

5. Sia data la conica

$$\Gamma:\ x^2 + xy + y = 0:$$

a) Γ ha solo (0,0) come punto reale;

b) è possibile effettuare una traslazione che consenta di ottenere una forma canonica di Γ;

c) Γ è un'ellisse tangente in (0,0) alla retta $y = 0$;

d) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

6. Sia

$$S: x^2 + y^2 - z^2 - 2y = 0:$$

a) la retta $x - z = y - 1 = 0$ appartiene ad S;

b) S è a punti iperbolici;

c) S non contiene circonferenze;

d) S è un paraboloide iperbolico.

7. Siano

$$\Sigma: 4x^2 - y^2 - \frac{16}{9} z^2 = 16$$

$$S : z = 1:$$

a) S interseca Σ lungo una parabola;

b) S non è tangente ad Σ;

c) Σ contiene rette reali;

d) Σ è a punti iperbolici.

8. L'equazione

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(z^2 + 2z + 1) = 0$$

rappresenta:

a) una circonferenza di centro (0,0,-1);

b) un iperboloide a una falda;

c) un ellissoide di semiassi a=1, b=1, c=2;

d) un cono di direttrice $x^2 + y^2 - \frac{1}{2} = z = 0$.